MA1 – přednáška 4.1.2021

Lineární algebra – úvod.

1. „Co je" lineární algebra

Od začátku semestru dosud jsme se zabývali diferenciálním a integrálním počtem reálných funkcí jedné reálné proměnné – úvodem do matematické disciplíny, zvané matematická analýza. Základem je zde „limita", pomocí které jsou pak definovány spojitost funkce, derivace a integrály. Nástrojem je zde pojem vzdálenosti v množině reálných čísel.

A nyní na závěr matematiky A1 se máme aspoň trošku seznámit s „další" matematickou disciplínou, též velmi důležitou a užitečnou v aplikacích – t.zv. lineární algebrou.

Algebra (obecná) je matematická disciplína, ve které se „zkoumají" vlastnosti početních operací, které jsou definovány v „různých" typech množin, a tyto „znalosti" se využívají mimo jiné i k řešení t.zv. algebraických rovnic. Zatím jsme „počítali" v $\mathbb{R}$ (někdo umí „počítat i v množině komplexních čísel $\mathbb{C}$), asi „umíte" i počítat s vektory v analytické geometrii (a též i ve fyzice). Algebra toto zobecňuje – dle vlastností početních operací se definují speciální „druhy" množin – okruhy, grupy, tělesa (ty studovat nebudeme) a speciální „druh" pro „naši" lineární algebru je t.zv. lineární (vektorový) prostor (viz dále).

A lineární algebra je pak „část" algebry, matematická disciplína, která se zabývá t.zv. lineárními zobrazeními a řešením lineárních rovnic v těch t.zv. lineárních (vektorových) prostorech.

A k tomu jsou vytvořeny (definovány) vhodné nástroje, se kterými se máme v úvodu do lineární algebry seznámit a naučit se s nimi „zacházet" a užívat je řešení těch zmíněných lineárních rovnic.

S lineárním zobrazením jsme se již setkali při řešení obyčejných lineárních diferenciálních rovnic, tj. rovnic

$$y' + p(x)y = f(x), \text{ kde funkce } p, q \in C(a,b);$$

pak zobrazení $D : C^1(a,b) \to C(a,b)$, definované

$$D(y) = y' + p(x)\,y$$

mělo dvě vlastnosti (vlastnosti linearity):

(i) pro každé dvě funkce $y_1, y_2 \in C^{(1)}(a,b)$ je $D(y_1+y_2) = D(y_1) + D(y_2)$;

(ii) pro lib. $c \in R$, a lib. $y \in C^{(1)}(a,b)$ je $D(cy) = c\,D(y)$.

<u>A obecně</u> (v lineární algebře):

1) <u>Lineární zobrazení $L : V_1 \to V_2$</u> je takové zobrazení, pro které platí ($V_1 \neq \phi$, $V_2 \neq \phi$):

(i) $\forall y_1, y_2 \in V_1 : \; L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$

(ii) $\forall y \in V_1, \forall c \in R : \; L(c.y) = c\,L(y)$

2) A odtud „vidíme", že lineární zobrazení můžeme definovat jen mezi takovými množinami V_1, V_2, kde je definováno sčítání prvků a násobení reálnou konstantou (a obecněji i konstantou komplexní); a mají-li tyto početní operace v množinách V_1, V_2 vlastnosti „stejné" jako „počítání" v $\mathbb{R}$, pak právě dostáváme ty zmíněné nahoře lineární (vektorové) prostory.

Známe už: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, z „naší" matematiky též prostory spojitých funkcí $C(a,b)$; prostory funkcí, majících spojité první derivace $C^{(1)}(a,b)$ (obecněji $C^{(k)}(a,b)$, $k \in N$ prostor funkcí, majících spojitou k-tou derivaci), ale i třeba prostor Riemannovsky integrovatelných funkcí $R(a,b)$ na intervalu $\langle a,b \rangle$;

ale už z analytické geometrie (a též z fyziky) umíte sčítat a násobit konstantou i vektory (v rovině, resp. v prostoru) – odtud název prostory vektorové;

také už víme, že pokud vyjádříme pomocí soustavy souřadnic vektory $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, pak

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3) \quad \text{a}$$
$$c\,\vec{u} = (cu_1, cu_2, cu_3),$$

tento prostor se značí R^3 (nebo též často E^3)

A snad už je i „vidět", co bude lineární (též vektorový) prostor:

Lineární prostor (též nazývaný prostor vektorový) je neprázdná množina V, kde je definováno

(i) sčítání prvků: $u, v \in V \rightarrow u+v \in V$

(ii) násobení konstantou: $c \in R, v \in V \rightarrow cv \in V$, $c \in R$ (obecněji z $\mathbb{C}$),

kde operace sčítání a násobení konstantou mají následující vlastnosti – „axiomy" vektorového (lineárního) prostoru:

pro každé $u, v, w \in V$ platí:

pro $\oplus$

1) $u + v = v + u$ (komutativita);

2) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (asociativita);

3) existuje prvek $0 \in V$ takový, že $0+u = u+0$, $\forall u \in V$;
(0 – nulový prvek)

4) ke každému prvku $v \in V$ existuje t.zv. prvek opačný, značí se $(-v)$ takový, že platí
$$v+(-v) = (-v)+v = 0 \;;$$

pro $c.$

1) $1.v = v$, $\forall v \in V$;

2) $c(dv) = (cd).v$, $c, d \in R$

3) $c(u+v) = cu + c.v$

4) $(c+d).u = c.u + d.u$

$\Big\}$ distributivní zákony ($c \in R$, $d \in R$ lib.)

Snadno se ověří, že všechny citované množiny ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $C\langle a,b\rangle$, $C^{(k)}\langle a,b\rangle$, $R\langle a,b\rangle$), kde se definuje sčítání ($\oplus$) i násobení konstantou ($c.$) známým způsobem, jsou lineární (vektorové) prostory (sčítání prvků i násobení konstantou se zde „přenáší" na operace s reálnými čísly, kde axiomy 1–8 zřejmě platí).

A vraťme se nyní k lineárním zobrazením – a s nimi souvisejícími lineárními rovnicemi, uveďme si příklady v našich uvedených prostorech (jeden ze tří příkladů bude inspirací k začátku naší cesty „lineární algebrou).

(i) „základní škola":

lineární rovnice zde (např.) $4x - 1 = x + 8$

vedle k rovnici $3x = 9$

a je „vidět", že lineární zobrazení je zde $L(x) = 3x$,

a lineární rovnice může být napsána: $L(x) = 9$

obecněji. $L(x) = ax$, $a \in R$ konstanta, $x \in R$, – lineární zobrazení $L: R \to R$, a

$L(x) = b$, tj. $ax = b$ – lineární rovnice v R

(ii) matematika A1:

lineární diferenciální rovnice $y' + p(x)y = f(x)$, $p(x), f(x) \in C(a,b)$;

pak lineární zobrazení: $D(y) = y' + p(x)y$, $D: C^{(1)}(a,b) \to C(a,b)$

(iii) „střední škola":

řeší se zde soustavy lineárních rovnic – příklad:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ x + 2y + z &= 2 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

lze i tuto úlohu chápat jako lineární rovnici v uvažovaném smyslu, tj. (L – lineární zobrazení)

$L(X) = B$, $X = ?$, $B = ?$

$L(X)$?

Lineární algebra

1) dává obecné návody pro řešení lineárních rovnic $L(x) = b$, $L: V_1 \to V_2$ lineární, $b \in V_2$

2) vytváří nástroje, jak konkrétní speciální problémy (speciální typy lineárních rovnic) chápat tak, aby k řešení bylo pak možné „užít obecné návody z 1 – o tom je matematika"

V „naší" Matematice A1 – máme se seznámit a naučit pracovat „prakticky" s takovými nástroji, které umožní ukázat, že soustavu obecně m rovnic pro n neznámých $(m, n \in N)$ můžeme chápat jako „jednu" rovnici lineární $L(X) = B$, kde $X = (x_1, x_2, .., x_n)\ (\in R^n)$ a $B = (b_1, b_2, ... b_m)\ (\in R^m)$, a $L : R^n \to R^m$ je lineární zobrazení – tomu je t.zv. maticový počet.

Ukažme si „cestu" k maticovému počtu na jednoduchém, shora uvedeném příkladu, dále pak „zobecníme":

Je dána soustava rovnic

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 2x + 3y + z = 1 \\ (2) & x + 2y + z = 2 \\ (3) & x + y + z = 0 \end{array}\right\} (*)$$

ukažme si, že řešení této soustavy je právě jedna „trojice" čísel $x = -3,\ y = 2,\ z = 1$

Jak se řeší soustava (*) (nebo řešila na střední škole)? – pomocí vhodných úprav (ekvivalentních), které nemění množinu řešení soustavy, nebo t.zv. eliminací – cílem je získat aspoň jednu rovnici jen pro „jednu" neznámou (zde „vyjde") nebo případně pro „menší" počet neznámých (příklad též bude)

(i) eliminace: ze (3) : $z = -x - y \quad (\tilde{3})$

dosadíme do (1) : $2x + 3y - x - y = 1 \iff x + 2y = 1 \quad (\tilde{1})$

(2) : $x + 2y - x - y = 2 \iff y = 2 \quad (\tilde{2})$

a pak z $(\tilde{1})$ $x = 1 - 4 = -3$

a z $(\tilde{3})$ $z = -(-3) - 2 = 1$

(ii) <u>užití „ekvivalentních" úprav soustavy:</u>

(k libovolné rovnici soustavy lze přičíst rovnici jinou, vynásobenou libovolným nenulovým číslem, můžeme změnit pořadí rovnic)

(2) − (3) : $y = 2$

(1) − (2) : $x + y = -1 \Rightarrow x = -3$

dosazení do (3) : $z = -x - y \Rightarrow z = 1$

Lineární algebra, spec. maticový počet, dává návod a definuje k tomu nástroje, jak řešení soustavy „zpřehlednit" (i u horších a větších soustav) a pak odtud i návod k řešení:

při úpravách rovnic pracujeme jen s koeficienty u neznámých a s pravými stranami rovnic – zapišme si je do „tabulky":

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)}_{\text{rozšířená matice soustavy}} \qquad \underbrace{\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{\text{matice soustavy}}$$

— matice (obdélníková „tabulka" čísel)

vektory $(2,3,1)$, $(1,2,1)$, $(1,1,1)$ se nazývají <u>řádky</u> matice (soustavy)

a $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ jsou <u>sloupce</u> matice (soustavy)

Ekvivalentní úpravy soustavy, napsané v „maticové" podobě:
(rovnice je „nahrazena" řádkem rozšířené matice soustavy)

1) záměna pořadí řádků matice
2) libovolný řádek matice můžeme vynásobit nenulovým číslem (násobíme jako vektor, tj. každou „složku")
3) k libovolnému řádku matice můžeme přičíst libovolný násobek řádku jiného (opět – řádky sčítáme jako vektory)

Ukázka v našem příkladu – cílem úprav je získat soustavu, kde aspoň jedna z rovnic bude rovnice pro jednu neznámou, tedy matice bude mít aspoň v jednom řádku jen jeden nenulový prvek:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{„výměna" 1. a 3. řádku}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{2.ř. - 1.ř.}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{3.ř. - 2\times 1.ř.}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{2.ř. - 3.ř.}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

a odtud můžeme opět k soustavě rovnic

$$(*)\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -y - z\text{, tj.} \\ \underline{y \qquad = 2} \qquad\qquad \underline{x = -3} \\ \underline{z \qquad = 1} \end{array}\right.$$

Ale vidíme, že u „poslední" matice můžeme ještě od prvního řádku odečíst 2. a 3. řádek, a dostaneme „krásný" výsledek:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{1.ř.-2.ř.-3.ř.}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad ;$$

a poslední získaná matice je matice soustavy ekvivalentní se soustavou zadanou, a to soustavy

$$(**)\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3 \\ y & = & 2 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$$

Výpočet řešení úpravou matice soustavy původní, vedoucí ke soustavě (*) se nazývá Gaussova eliminační metoda; pokračování k matici poslední" a k soustavě (**) pak Gauss-Jordanova metoda „řešení soustavy lineárních rovnic.

Výsledek řešení Gauss-Jordanovou metodou asi připomíná (ZŠ) – – řešení rovnice $3x = 9 \iff x = \frac{9}{3}$!

Kdybychom soustavu lineárních rovnic uměli napsat „analogicky" – – místo x (ZŠ) $\longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, a místo „3" matici ?

$$? \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

– a násobení matice a vektoru se definovalo!

Má to „znamenat"
$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y + z & = & 1 \\ x + 2y + z & = & 2 \\ x + y + z & = & 0 \end{array}$$

a vidíme, že rovnici $2x+3y+z=1$ lze zapsat jako skalární součin vektorů $(2,3,1)\cdot(x,y,z)$!

Tedy, „definice" součinu matice (naší) a vektoru je:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2,3,1)\cdot(x,y,z) \\ (1,2,1)\cdot(x,y,z) \\ (1,1,1)\cdot(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Toto je v lineární algebře obecně v maticovém počtu – základy probereme v příští přednášce.

A ještě jeden „pokus":

zdá se, že výsledek Gauss-Jordanovy eliminace by „odpovídal" dělení maticí soustavy:

když soustavu zapíšeme $A.X = B$, dostali jsme

$$X = (?).B \quad ?$$

zde $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

A obecně $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$? Zkusme opět Gauss-Jordanovu eliminaci: (zopakujme stejné úpravy)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & b-c \\ 0 & 1 & -1 & a-2c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & b-c \\ 0 & 0 & 1 & -a+b+c \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a-2b+c \\ 0 & 1 & 0 & b-c \\ 0 & 0 & 1 & -a+b+c \end{array}\right)$$

, tedy, $x = a-2b+c$, $y = b-c$, $z = -a+b+c$, neboli

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2b+c \\ b-c \\ -a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad !$$

Matice $\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$ se nazývá matice inverzní k matici A, a značí A^{-1}. Tedy, když máme soustavu, zapsanou ve tvaru

$$A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, \quad \text{pak} \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix};$$

odpovídalo (ZŠ): $ax=b,\ a\neq 0$, pak $x=\frac{b}{a}$ (též $x=a^{-1}\cdot b$); a jak „známo", pro $a\neq 0$ platí $a\cdot a^{-1}=1$, a tak máme další otázku pro „maticový počet" a lineární algebru –
– dá se „definovat" i násobení matic tak, aby platila analogie –
– tj: $A\cdot A^{-1}=\underline{I}$ – a co bude $\underline{I}$ – tj. analogie „1" při násobení? Ukážeme si vše v základech maticového počtu.

Soustava lineárních rovnic ale může mít nekonečně mnoho řešení, nebo také nemusí mít řešení žádné. Ukažme si takové příklady (a zopakujeme si Gaussovu metodu) – uvažujme dvě soustavy:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} & & & (1) & (2)\\ 2&3&1&1&1\\ 1&2&1&2&2\\ 1&3&2&5&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c}1&2&1&2&2\\ 1&3&2&5&0\\ 2&3&1&1&1\end{array}\right) \underset{3.ř-2\times 1.ř}{\overset{2.ř-1.ř}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c|c}1&2&1&2&2\\ 0&1&1&3&-2\\ 0&-1&-1&-3&-3\end{array}\right) \sim$$

$$\underset{2.ř+3.ř}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c|c} & & & (1) & (2)\\ 1&2&1&2&2\\ 0&1&1&3&-2\\ 0&0&0&0&-5\end{array}\right) \longrightarrow \text{tato matice odpovídá soustavám}$$

(1)
$$\begin{aligned} x+2y+z&=2\\ y+z&=3\\ 0&=0\end{aligned}$$

a (2)
$$\begin{aligned} x+2y+z&=2\\ y+z&=-2\\ 0&=-5\end{aligned}$$

Vidíme hned, že soustava (2) nemá řešení.

a soustava (1) má nekonečně mnoho řešení, máme zde jen „dvě" rovnice pro tři neznámé, tedy jednu neznámou „můžeme volit libovolně", třeba $z = t$, $t \in R$; pak

$$y = 3 - z, \text{ tedy } y = 3 - t$$

a $x = -2y - z + 2$, tedy $x = -2(3-t) - t + 2$, tj. $x = -4 + t$;

Řešení soustavy (1) můžeme zapsat „přehledně" (vektorově)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + t \\ 3 - t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in R$$

Vidíme analogii s LODR: $y_{ob} = y_H + y_P$,

neboť vektory $t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ řeší soustavu
$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \\ x + 3y + 2z &= 0 \end{aligned},$$

a vektor $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ je „jedno" řešení soustavy s pravou stranou $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

I toto je v „obecném pohledu" lineární algebry na řešení lineárních rovnic.

(A zkuste i „geometrický" výklad řešení daných soustav – – průnik rovin, zadaných jednotlivými rovnicemi soustavy)

A nyní, po úvodním příkladu, zkusme formulovat obecně, co je v lineární algebře uděláno pro řešení soustav lineárních rovnic:

<u>Formulace problému:</u> máme najít všechny n-tice reálných čísel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $n \in N$ $(n \geqq 2)$ tak, aby platilo

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \qquad\qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} ,$$

$a_{ij}, b_i \in R$, $i = 1, 2, \dots n$; $j = 1, 2, \dots m$, $m \in N$

<u>Lineární algebra „radí":</u>

1) hledané řešení uvažujte jako uspořádanou n-tici reálných čísel $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$;
množinu všech uspořádaných n-tic reálných čísel označujeme (zpravidla) $\underline{R^n}$, R^n je vektorový (lineární) prostor, s operacemi sčítání a násobení konstantou (reálnou):
pro $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ definujeme

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$
$$c\vec{x} = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n) \quad (c \in R)$$

(tj. R^n je zobecnění „známých" prostorů R^2, R^3)

2) soustavu (1) zapište pomocí „uspořádané" tabulky koeficientů u jednotlivých neznámých a „pravých stran:

$$(1) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

tj. pomocí matice.

A základní „informace" o maticích :

- Matice A je (obecně) obdélníková tabulka reálných čísel, píšeme
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$
nebo stručně $A = (a_{ij})_{i=1,\dots m}^{j=1,\dots n}$, $m, n \in N$;
- vektor $(a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{in}) \in R^n$ i-tý řádek matice A
- a $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in R^m$ – j-tý sloupec matice A ;
- matice A, která má m řádků a n sloupců se nazývá matice „typu (m,n)" ;
- a_{ij} – prvek matice v i-tém řádku a j-tém sloupci (i – řádkový index, j-sloupcový index) ; $i=1,..n$; $j=1,..m$;
- speciálně, když $m=n$, matice A typu (n,n) se nazývá matice čtvercová

A pro řešení soustav užitím úprav matice soustavy a rozšířené matice soustavy (Gaussova eliminační metoda, Gauss-Jordanova)

- ekvivalentní úpravy matic :
  (i) záměna pořadí řádků ;
  (ii) libovolný řádek můžeme vynásobit číslem $\alpha \neq 0$;
  (iii) k libovolnému řádku matice můžeme přičíst libovolný násobek jiného řádku

(Gaussovu a Gauss-Jordanovu metodu – probereme i „obecně" i na příkladech)

- prvky matice $A = (a_{ij})_{i=1,..,m}^{j=1,..,n}$, kde $i=j$, tj. prvky a_{ii}, se nazývají diagonální prvky matice A;
- matice $A = (a_{ij})_{i=1,..,m}^{j=1,..,n}$, kde $a_{ij}=0$ pro $j>i$, se nazývá „horní trojúhelníková" matice;

Př. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (matice typu $(3,4)$)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}, & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – čtvercová horní trojúhelníková matice (typu (n,n))

- Další operace s maticemi – násobení matice a vektoru

(užitečné pro další „cestu" k řešení soustav lineárních rovnic)

Soustava

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

může být „zapsána" jako

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

a definujeme součin matice A (m,n) a vektoru $\vec{x} \in R^n$:

$$A \cdot x = y, \quad y \in R^m \quad a \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, .. m$$

(„čitelněji" : $y_i = (i\text{-tý řádek matice } A) \cdot (\vec{x})$, kde $\vec{a} \cdot \vec{b}$ je „skalární součin vektorů z R^n", který se definuje
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$ – „zobecnění" skalárního součinu z R^2, R^3)

Příklad: („z úvodu")

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.(-3)+3.2+1.1 \\ 1.(-3)+2.2+1.1 \\ 1.(-3)+1.2+1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• A další zobecnění – násobení matic:

1) Definujeme: je-li $A = (a_{ij})_{i=1,..m}^{j=1,..n}$ typu (m,n) a

$B = (b_{jk})_{j=1,..n}^{k=1,..p}$ matice typu (n,p),

pak součin matic $A.B = C$, kde $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$,

$i = 1,2,..m$, $k = 1,2,..p$.

Definice součinu matic A,B je asi dost „nečitelná", tak si ji zkusme „trochu čitelněji":

(i) součin matic $A \cdot B = C$ je „definován", když „$(m,n) \cdot (n,p) = (m,p)$"

tj. matice B má „stejně" řádků jako matice A sloupců;

(ii) „výsledný" součin C je typu (m,p), tj. C má stejně řádků, jako matice A, a sloupců jako matice B;

(iii) prvek c_{ik} matice C je skalární součin i-tého řádku A a k-tého sloupce matice B, tj.

„$c_{ik} = (i\text{-tý řádek } A) \bullet (k\text{-tý sloupec } B)$"

(toto se snad „dobře" pamatuje).

2) A před příklady ještě „vlastnosti" násobení matic:

(i) násobení matic není obecně komutativní, tj.
obecně $A \cdot B \neq B \cdot A$ ($AB = BA$ - platí jen výjimečně - - t.zv. matice záměnné)

(ii) existují matice, které mají „analogickou vlastnost" k číslu 1, t.zv. jednotkové matice (značí se I nebo E):

$$\underset{(\text{typu }(n,n))}{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \\ 0 & \dots & \dots & 0\ 1 \end{pmatrix}$$

, tj. $I = (a_{ij})$, kde $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ $(i,j = 1, \dots n)$

Pak platí $A \cdot I_n = A$ (A typu (m,n), I (n,n))
i $I_m A = A$ (A typu (m,n), I (m,m))

(iii) je-li A čtvercová matice, a existuje-li matice B čtvercová taková, že platí $A \cdot B = I$, pak matice B se nazývá matice inverzní k matici A a značíme $B = A^{-1}$.
Pak platí též $B \cdot A = I$ (tj. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$)
(A - čtvercová matice typu (n,n) - častěji se říká <u>čtvercová matice řádu n</u> a značí A $(n \times n)$, stejně tak i A^{-1} je čtvercová matice řádu n)

Kdy k matici A existuje matice inverzní - ukážeme „později".

(iv) ještě další užitečná vlastnost násobení (bez důkazu, ověříme" počítáním příkladů) - asociativita: máme-li matice" A, B, C, a je-li definován součin
$(A \cdot B) \cdot C$, pak platí $(A \cdot B) \cdot C = A (B \cdot C)$

(v) definujme i sčítání matic :
jsou-li matice A, B stejného typu (m, n), pak
$$A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n}$$

(vi) a zákon distributivní pro násobení matic : nechť A, B jsou matice typu (m,n), C je typu (n,p); pak platí
$$(A+B).C = A.C + B.C$$
(opět bez důkazu)

<u>a několik příkladů</u>

(1.) a) V našem pokusném příkladu řešení soustav jsme měli matici soustavy
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a k ní jsme našli při metodě Gauss-Jordanově při obecných pravých stranách matici
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

takovou, že řešení soustavy $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ jsme

mohli vyjádřit ve tvaru $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Ukážeme si, že platí $A.B = B.A = I$, tedy $B = A^{-1}$:

$$\underline{A \cdot B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (= I)$$

a

$$\underline{B \cdot A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (= I)$$

b) <u>a ukažme si obecné řešení soustavy $A . x = b$,</u>
pokud existuje A^{-1}:

$$\underline{Ax = b} \quad | \ A^{-1} \cdot \quad \text{(násobíme zleva!)}$$

$$A^{-1} \cdot (Ax) = A^{-1} \cdot b \qquad + \text{asociativita}$$

$$(A^{-1} \cdot A)x = A^{-1} \cdot b \qquad A^{-1} \cdot A = I$$

$$I x = A^{-1} \cdot b \qquad I . x = x$$

tj. – $\underline{x = A^{-1} . b}$

a zkouška „správnosti" řešení:

$$A . (A^{-1} . b) = (A \cdot A^{-1}) b = I . b = b \quad !$$

(2) $\underline{A \cdot I = I . A = A}$ – ověření na příkladu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 + 2.0 \, , & 1.0 + 2.1 \\ 3.1 + 4.0 \, , & 0.3 + 4.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 + 0.3 \, , & 1.2 + 0.4 \\ 0.1 + 1.3 \, , & 0.2 + 1.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

③ <u>Násobení matic není komutativní</u> – příklady

(i) pokud $A\ (m,n)$, $B\ (n,p)$ $\quad m \neq p$, pak
součin $A \cdot B$ je definován („$(m,n) \cdot (n,p) = (m,p)$"),
ale součin $B \cdot A$ definován <u>není</u> ($\underbrace{(n,p) \cdot (m,n)}_{p \neq m}$!)

(ii) i když $m = p$:
pak $A \cdot B$ je typu (m,m) („$(m,n) \cdot (n,m) = (m,m)$")
ale $\quad B \cdot A$ je typu (n,n) („$(n,m) \cdot (m,n) = (n,n)$")
tedy pro $n \neq m$ jsou $A \cdot B$ a $B \cdot A$ matice různé !

ale i pro
(iii) <u>$m = n = p$</u> :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{ale}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{tj.}$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Ještě zde „chybí", co znamená rovnost matic (omlouvám se):

$A = B$, když

(i) A, B jsou matice stejného typu (m,n) ;

(ii) $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$.